

# GEBÄUDE AUS GRUPPEN:

## Beispiele und Bilder

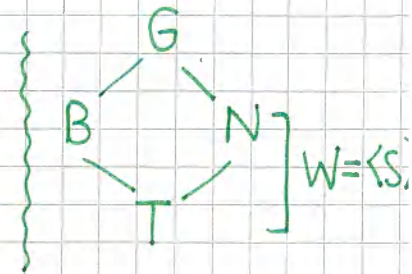
### Wiederholung:

$(G, B, N, S)$  Tits system, d.h.

\*  $B, N \leq G$  d.d.  $G = \langle B \cup N \rangle$

\*  $T = B \cap N \triangleleft N$

\*  $S$  Erzeugendensystem für  $W = N/T$



(BN1)  $\forall s \in S, \forall w \in W: C(s)C(w) \subseteq C(w) \cup C(sw)$

wobei  $C(w) = BwB$

(BN2)  $\forall s \in S: sBs^{-1} \not\subseteq B$

Satz:  $\Delta = \Delta(G, B)$  ist eine dicke Gebäude und die

Wirkung  $G \curvearrowright \Delta$  ist stark-transitiv

induzierte Wirkung auf

$\{(\Sigma, C): \Sigma \in \mathcal{A}, C \in \text{Ch}(\Sigma)\}$  transitiv

Idee: Für gewählte  $\Sigma_0 = \text{standard Apartment}$

$C_0 = \text{standard Kammer}, C_0 \in \text{Ch}(\Sigma_0)$

sind

$$B = \{g \in G: gC_0 = C_0\}$$

$$N = \{g \in G: g\Sigma_0 = \Sigma_0\}$$

$$T = \{g \in G: g|_{\Sigma_0} = \text{id}|_{\Sigma_0}\}$$

$\Delta$  normalerweise  $\subseteq$

$\downarrow \cong$

$$(BN3) \quad T = \bigcap_{w \in W} wBw^{-1}$$

### Die Gebäude $\Delta$ :

$$\leq_0 \stackrel{\text{def}}{=} "A \leq B \quad ( \Rightarrow ) \quad A \supseteq B"$$

$$\Delta = \Delta(G, B)$$

$$= \{ \text{spezielle Nebenklamen in } G \} \leq_0$$

$$= \{ gP : g \in G, \underline{P \leq G \text{ speziell}} \} \leq_0$$

Satz  $\quad P = BW'B \text{ f\u00fcr } W' = \langle S' \rangle, S' \subseteq S$

$$= \{ gP : g \in G, B \leq P \leq G \}$$

Satz :  $\Delta \cong \{ \underline{P \leq G \text{ parabolisch}} \} \leq_0$

$$\exists x \in G : P \supseteq x B x^{-1}$$

Bemerkung :

$P$  parabolisch  $\longleftrightarrow$  Simplex in  $\Delta$

$$x B x^{-1}$$

$$x = 1$$

$$x \in W$$

$\longleftrightarrow$  Kammer

$\longleftrightarrow C_0$ , standard kammer

$\longleftrightarrow C \in \text{Ch}(\Sigma_0)$

$\Sigma_0$ , standard Apartment

max parabolisch  $\longleftrightarrow$  0-Simplizes

Heute : Beispiele von  $(G, B, N, S)$

Hauptziel : Bilder von  $C_0, \Sigma_0$

Rest :  $\mathcal{CA} = \{ g \Sigma_0 : g \in G \}$

$$\text{Ch}(\Delta) = \{ g C_0 : g \in G \}$$



Beispiel (I):  $GL_n$  - allgemeine lineare Gruppe

(2)

$n \geq 2$ ,  $K$  Körper,  $G = GL_n(K)$  } auch  $SL, PGL, PSL$   
 $(e_1, \dots, e_n)$  = standard Basis für  $V = K^n$

Notation:  $(1) \subseteq (1, 2) \subseteq (1, 2, 4)$  bedeutet  
 $\langle e_1 \rangle \subseteq \langle e_1, e_2 \rangle \subseteq \langle e_1, e_2, e_4 \rangle$

$$B = \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \leq G \quad \leadsto B = \text{Stab}_G((1) \subseteq (1, 2) \subseteq \dots \subseteq (1, \dots, n))$$

$(1) \subseteq \dots \subseteq (1, \dots, n-1)$

$N$  = monomiale Untergruppe von  $G$

$$\leadsto N = \text{Stab}_G(\{(i) : i=1, \dots, n\})$$

bis auf Skalierung  
Permutation der Standard  
Basisvektoren

Dann:  $T = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \cong (K^*)^n$

$$W = N/T \cong \text{Sym}(n)$$

$$S = \{(i \ i+1) : i=1, \dots, n-1\}$$

$\rightarrow (G, B, N, S)$  ist ein Tits System

Das standard Paar  $(\Sigma_0, C_0)$ :  $n=3$

• Kammern  $\leadsto xBx^{-1}$ ,  $x \in W$

$x=1$ :  $B = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((1) \subseteq (1, 2))$

$x=(1\ 2)$ :  $xBx^{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((2) \subseteq (1, 2))$

$x=(2\ 3)$ :  $xBx^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((1) \subseteq (1, 3))$

$x=(1\ 2\ 3)$ :  $xBx^{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((2) \subseteq (2, 3))$







# Beispiel ②: $Sp_{2n}$ - symplektische Gruppe

③

$n \geq 1$ ,  $K$  Körper,  $G = Sp_{2n}(K)$ ,  $V = K^{2n}$

Automorphismen von  $V$  die eine symplektische Form respektieren

Wir definieren

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow K$$

$$(e_i, e_j) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } i+j \neq 2n+1 \\ 1 & \text{falls } i+j=2n+1, i < j \\ -1 & \text{falls } i+j=2n+1, i > j \end{cases}$$

$K$ -bilinear  
nicht ausgeartet

d.h. (hier  $n=2$ ,  $2n=4$ ,  $2n+1=5$ )

|       | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e_1$ |       |       |       | 1     |
| $e_2$ |       |       | 1     |       |
| $e_3$ |       | -1    |       |       |
| $e_4$ | -1    |       |       |       |

$\square = \text{max isotropisch}$

im Allgemeinen

$e_1, \dots, e_n$

$f_n = e_{n+1}, \dots, f_1 = e_{2n}$

und damit ist

$$G = \{ g \in GL_{2n}(K) \mid \forall v, w \in V: \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle \}$$

$$= \{ (v_1 | \dots | v_{2n}) \mid v_i \in V \text{ mit } V = \sum K v_i \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = \bullet \}$$

Bemerkungen:

$$* \langle e_i, f_i \rangle = 1 = -\langle f_i, e_i \rangle$$

\*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist alternierend ( $\langle \cdot, \cdot \rangle \stackrel{\text{char } K \neq 2}{=} \text{schief symm.}$ )

$$* W \leq V, g \in G: gW \subseteq W \iff gW^\perp \subseteq W^\perp$$

$$\underline{B}: (1) \subseteq (1, 2) \subseteq \dots \subseteq (1, \dots, n) = (1, \dots, n) \subseteq \dots \subseteq (1, \dots, 2n-2) \subseteq (1, \dots, 2n-1)$$

standard isotropische Flagge



Das B-N Paar :

$$B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G(\text{standard Flagge})$$

$$N = \begin{matrix} \text{monomiale} \\ \text{Untergruppe} \\ \text{von } G \end{matrix} = \text{Stab}_G(\{ (i) : i=1, \dots, 2n \})$$

$$\stackrel{!}{=} \text{Stab}_G(\{ L_1, \dots, L_n, L'_1, \dots, L'_n \})$$

wobei  $L_i = \langle e_i \rangle, L'_i = \langle f_i \rangle$

Dann :

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_n & \\ & & & \lambda_n^{-1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix} : \lambda_i \in K^* \right\} \cong (K^*)^n$$

$$W = N/T \cong \text{Sym}(\overbrace{\{ L_i, L'_i \}}^{\mathcal{S}_i} : i=1, \dots, n)$$

$$\cong \underbrace{(\mathbb{Z}/(2))^n}_{L_i \leftrightarrow L'_i} \rtimes \underbrace{\text{Sym}(n)}_{\text{Sym}(\{ \mathcal{S}_i : i \})} = \text{Sym}^\pm(n)$$

$$S = \{ \underbrace{(i \ i+1)(i' \ i'+1)}_{(2n-i+1 \ 2n-i+2)} : i=1, \dots, n-1 \} \cup \{ \underbrace{(n \ n')}_ {(n \ n+1)} \}$$

$\rightarrow (G, B, N, S)$  ist ein Tits System

Das standard Paar  $(\Sigma_0, C_0)$  :  $n=2 (\Rightarrow 2n=4)$

$$L_1 = (1) \quad L_2 = (2)$$

$$L'_1 = (4) \quad L'_2 = (3)$$

$$W = \text{Sym}(\{ \{ (1), (4) \}, \{ (2), (3) \} \})$$

$$\stackrel{!}{=} \{ 1, \underbrace{(12)(34)}_S, (23), (1243), (1342), (13)(24), (14), (14)(23) \} \cong D_8$$



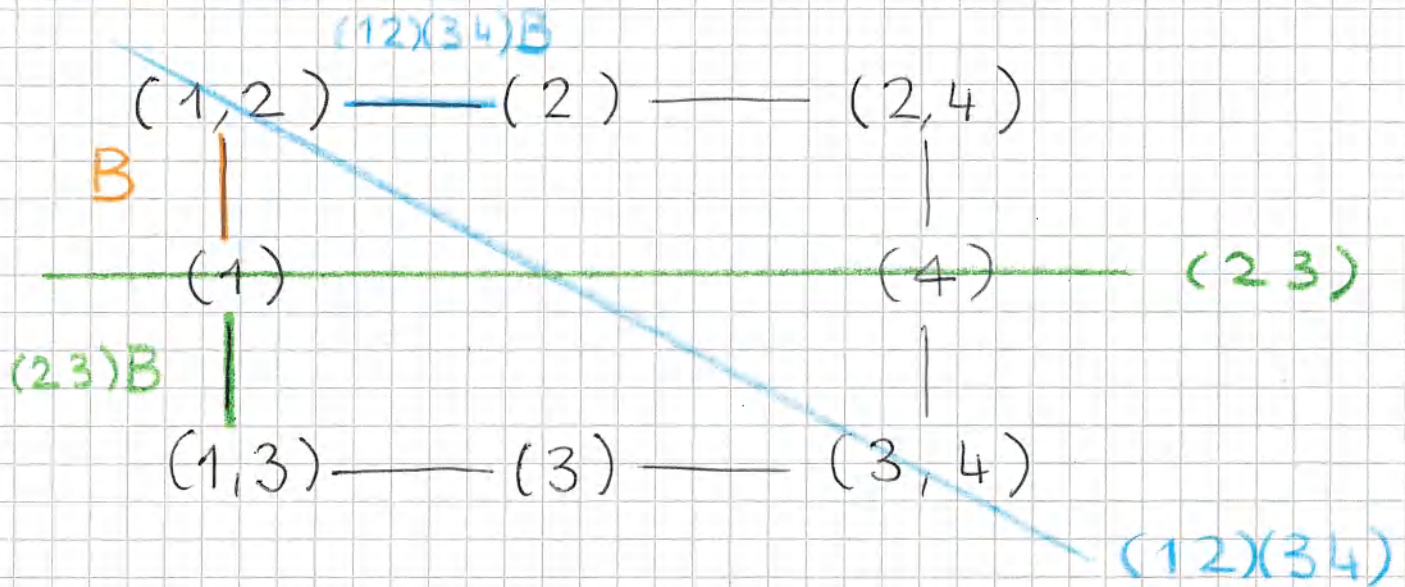
• Kammern  $\longleftrightarrow x B x^{-1}, x \in W$

$x=1$ :  $B = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((1) \subset (1,2) \subset \overbrace{(1,2,3)}^{(1)^+})$   
 $= \text{Stab}_G((1) \subset (1,2))$

$x = (12)(34)$ :  $x B x^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((2) \subset (1,2))$

$x = (2,3)$ :  $x B x^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ * & * & * & * \\ & * & * & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((1) \subset (1,3))$

Ein Bild von  $\Sigma_0$ :



Beispiel III:  $O_m$  - orthogonale Gruppe

$m \geq 2$ ,  $K$  Körper,  $\text{char } K \neq 2$ ,  $V = K^m$

Wir definieren

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \longrightarrow K, \quad K\text{-bilinear, symmetrisch}$$

$$(e_i, e_j) \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i+j = m+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

→ d.h. (hier  $m=4$ ,  $m+1=5$ )  $m=2n$

|       | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $e_1$ |       |       |       | 1     |
| $e_2$ |       |       | 1     |       |
| $e_3$ |       | 1     |       |       |
| $e_4$ | 1     |       |       |       |

$e_1, \dots, e_n$   
 $f_n, \dots, f_1$

→ d.h. (hier  $m=3$ ,  $m+1=4$ )  $m=2n+1$

|       | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $e_1$ |       |       | 1     |
| $e_2$ |       | 1     |       |
| $e_3$ | 1     |       |       |

⋮      ⋮

$e_1, \dots, e_n$   
 $e_{n+1}$   
 $f_n, \dots, f_1$

$Q$  — assoziierte quadratische Form

Wir fangen an mit

$$G = SO_m(K) = \{ g \in SL_m(K) \mid \forall v, w \in V: \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle \}$$

$$= \{ g \in SL_m(K) \mid \forall v \in V: Q(gv) = Q(v) \}$$



Das B-N Paar : ist wie früher aber

(5)

$$T = B \cap N = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_n & & \\ & & \lambda_n^{-1} & \\ & & & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix} : \lambda_i \in K^\times \right\} & \text{falls } m=2n \\ \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_n & & & \\ & & \lambda_n^{-1} & & \\ & & & \lambda_n^{-1} & \\ & & & & \lambda_1^{-1} \end{pmatrix} : \lambda_i \in K^\times \right\} & \text{falls } m=2n+1 \end{cases}$$

$$W = N/T \cong \begin{cases} \text{Untergruppe von } \text{Sym}^\pm(n) & \text{falls } m=2n \\ \text{von Index 2} & \\ \text{Sym}^\pm(n) & \text{falls } m=2n+1 \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} \{(i \ i+1)(i' \ i'+1) : i < n\} \cup \{(n-1 \ n')(n \ n'-1)\} & m=2n \\ \{(i \ i+1)(i' \ i'+1) : i < n\} \cup \{(n \ n')\} & m=2n+1 \end{cases}$$

$\rightarrow (G, B, N, S)$  ist ein Tits System

Das standard Paar  $(\Sigma_0, C_0)$  :

(1) Erster Versuch :  $m=4$

$$S = \{(1 \ 2)(3 \ 4), (1 \ 3)(2 \ 4)\}$$

$$W = \{1, (1 \ 2)(3 \ 4), (1 \ 3)(2 \ 4), (1 \ 4)(2 \ 3)\} \cong V_4$$

Wenn wir es genau so wie früher versuchen

$$\underline{x=1} : B = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \\ & & & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((1) \subset (1 \ 2))$$

für  $m=2n+1$   
analog zu  $sp_{2n}$   
✓

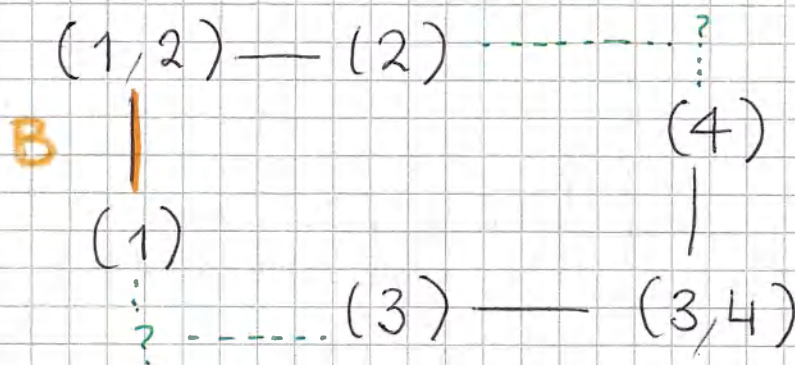
$$\underline{x=(1 \ 2)(3 \ 4)} : x B x^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & * & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((2) \subset (1 \ 2))$$



$$\underline{x = (13)(24)} \quad x B x^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & & \\ & * & & \\ * & * & * & * \\ * & * & & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((3) \subset (3,4))$$

$$\underline{x = (14)(23)}: x B x^{-1} = \begin{pmatrix} * & & & \\ * & * & & \\ * & * & * & \\ * & * & * & * \end{pmatrix} = \text{Stab}_G((4) \subset (3,4))$$

Wir kriegen:



Aus dem Bild sieht man schon, dass  $\Delta = \Delta(G, B)$  nicht das Flagge-Komplex der isotropischen Unterräume sein kann

zB: die Wirkung von  $W$  wäre nicht transitiv auf  $\text{Ch}(\Sigma_0)$ !! (2 Bahnen)

Außerdem: die Gebäude ~~ist~~ wäre nicht dick.

IdT dafür sollte  $zB$  (1) Face von  $\geq 3$  Kammern sein. Aber wenn wir ausrechnen:

$$\begin{cases} (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \\ (x \ y \ z \ t) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t=0 \\ 2yz=0 \end{cases}$$

Also (1) ist Face nur von den Kammern  $(1) \subset (1,2)$  &  $(1) \subset (1,3)$

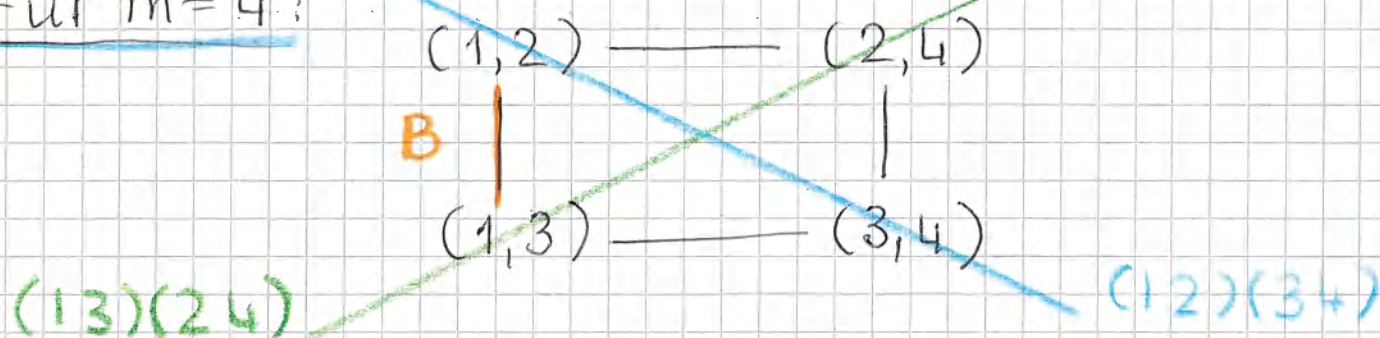


(2) Zweiter Versuch : Oriflamme  
Geometrie ( $m=2n$ ) (6)

Elemente :  $0 \neq T \leq V$  isotropisch der  $\dim \neq n-1$

Inzidenz :  $T \sim T' \Leftrightarrow T \subseteq T' \text{ oder } T' \subseteq T \text{ oder}$   
 $(\dim T = \dim T' = n \text{ \& } \dim(T \cap T') = n-1)$

Für  $m=4$ :



Wie können wir das in Sinne von  $x B x^{-1}$  interpretieren?

Bemerkung : Wenn wir  $Q=0$  setzen, kriegen wir  
 $xt + yz = 0$  [koordinaten  $(x, y, z, t)$ ]

$$\begin{aligned} & \begin{cases} t=0 & y=0 & (1,3) \\ & z=0 & (1,2) \\ x=0 & y=0 & (3,4) \\ & z=0 & (2,3) \end{cases} \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass  $B$  stabilisiert beide  $(1,2)$  und  $(1,3)$ : durch Widerspruch sei  $g \in B$  d.d.

$$ae_1 + be_3 \xrightarrow{g} ce_1 + de_2 + fe_3, d \neq 0$$

$$\text{dann } \langle g(ae_1 + be_3), g(ae_1 + be_3) \rangle = 0$$

$$\langle ce_1 + de_2 + fe_3, ce_1 + de_2 + fe_3 \rangle = 2df$$

$$\leadsto f=0 \quad \Downarrow$$

$Q_m$ ?  
not  
type-  
preserving



Beispiel (IV):  $SL_n$  (diskret bewerteter Körper)

Bis jetzt: sphärische Gebäude

Hier: affine Gebäude

Notation:  $p$  Primzahl

$$K = \mathbb{Q}_p$$

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}_p$$

$$\text{val} = \text{val}_p$$

} im Allgemeinen:

$K$  Körper mit  $\text{val}: K \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$

$$\mathcal{O}_K = \{x \in K : \text{val}(x) \geq 0\}$$

$$\pi \in K \text{ mit } \text{val}(\pi) = 1.$$

$$G = SL_n(\mathbb{Q}_p) \quad G \quad V = \mathbb{Q}_p^n$$

Def: Ein Gitter in  $V$  ist ein  $\mathbb{Z}_p$ -Untermodul vom Rang  $n$ , d.h.  $\exists b_1, \dots, b_n$  eine Basis von  $V$  d.d.  $L = \mathbb{Z}_p b_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p b_n$

(Insbesondere gilt  $V = K \otimes_{\mathbb{Z}_p} L$ )

~~Die~~ Das standard Gitter entspricht die standard Basis von  $V$ , d.h.

$$L_0 = \mathbb{Z}_p e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p e_n$$

Die Homothetieklasse einer Gitter  $L$  ist

$$[L] = \{c \cdot L \mid c \in \mathbb{Q}_p^\times\} = \{p^s \cdot L \mid s \in \mathbb{Z}\}$$

Die Bruhat-Tits Gebäude von  $SL_n(\mathbb{Q}_p)$ :  $\mathcal{B}_n(\mathbb{Q}_p)$

0-simplizes: Homothetieklassen von Gittern

Simplizes:  $\{[L_1], \dots, [L_s]\}$  ist ein  $(s-1)$ -Simplex wenn  $\exists \tilde{L}_i \in [L_i]$  d.d., bis auf Permutation,  $\tilde{L}_1 \supset \tilde{L}_2 \supset \dots \supset \tilde{L}_s \supset p\tilde{L}_1$

Kammern:  $s = d$ .



## Bemerkungen:

7

- $k = \mathcal{O}_K / (\pi) = \mathbb{Z}_p / (p) \cong \mathbb{F}_p$  Restklassenkörper
- $L$  Güter. Dann  $L/pL \cong k^n$ . Also simplizes von Gütern entsprechen Flaggen in  $k^n$ .

Frage: Was sind die Apartments? Was ist das Standard Paar  $(\Sigma_0, C_0)$ ?

Das B-N Paar:

- Wir haben  $SL_n(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\pi} SL_n(\mathbb{F}_p)$

$$\frac{U}{B} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$B = \pi^{-1}(\overline{B})$$

$$= \{ g \in SL_n(\mathbb{Z}_p) : v_p(g_{ij}) > 0 \text{ falls } i > j \}$$

$N =$  monomiale Untergruppe von  $G$ .

Dann:

$$T = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \subseteq SL_n(\mathbb{Z}_p)$$

$$W = N/T \cong D \rtimes S_n$$

$$\text{wobei } D = \left\{ \begin{pmatrix} p^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & p^{a_n} \end{pmatrix} : \sum a_i = 0, a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$S = \{ s_0, s_1, \dots, s_{n-1} \} \text{ wobei}$$



• Falls  $i = 1, \dots, n-1$ , dann

$$S_i(e_j) = \begin{cases} e_j & j \neq i, i+1 \\ e_i & j = i+1 \\ e_{i+1} & j = i \end{cases} \quad S_i = (i \ i+1)$$

• Falls  $i=0$ , dann

$$S_0(e_j) = \begin{cases} e_j & j \neq 1, n \\ p e_1 & j = n \\ p^{-1} e_n & j = 1 \end{cases}$$

$\rightarrow (G, B, N, S)$  ist ein Tits System

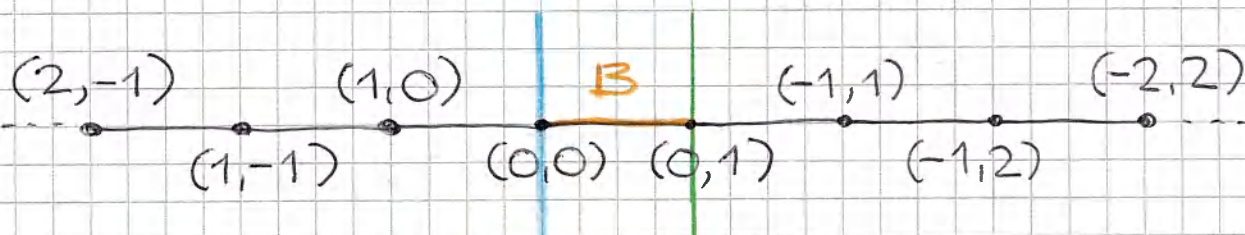
Das standard Paar  $(\Sigma_0, C_0)$ :

$\rightarrow$  Falls  $n=2$

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{pmatrix} \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_p)$$

$$= \left\{ g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p) : \mathrm{val}_p(g) = (\mathrm{val}_p(g_{ij})) \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\leadsto C_0 = \left\{ \begin{array}{l} [L_0] = [\mathbb{Z}_p e_1 \oplus \mathbb{Z}_p e_2] \\ [\mathbb{Z}_p e_1 \oplus \mathbb{Z}_p p e_2] \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (0,0) + \lambda(1,1) \\ (0,1) + \mu(1,1) \end{array}$$



$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p \\ p^{-1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$



Insbesondere entspricht  $\Sigma_0$  den Subkomplex (8) von Homotopieklassen von Gütern der Form  $\mathbb{Z}_p p^\alpha e_1 \oplus \mathbb{Z}_p p^\beta e_2$

Ein Blick auf die Gebäude :

Für jedes  $L$ , hat  $[L]$  genau  $p+1$  ~~na~~ Nachbarn:  
 $\text{idT}: L/pL \cong \mathbb{F}_p^2$  hat genau  $p+1$  Geraden

$\leadsto$  die Gebäude  $\Delta = \Delta(G, B)$  ist in diesem Fall ein  $(p+1)$ -regulärer Baum wobei jede Gerade ein Apartment entspricht. [siehe Bild auf Seite 134, wobei  $p=2$ ]

$\rightarrow$  Falls  $n=3$

$$B = \left( \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p & \mathbb{Z}_p \end{array} \right) \cap SL_3(\mathbb{Z}_p)$$

$$= \left\{ g \in SL_3(\mathbb{Z}_p) \mid \text{val}_p(g) \geq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\langle \sim \rangle C_0 = \left\{ \begin{array}{l} [L_0] = [\mathbb{Z}_p e_1 \oplus \mathbb{Z}_p e_2 \oplus \mathbb{Z}_p e_3] \\ [\mathbb{Z}_p e_1 \oplus \mathbb{Z}_p e_2 \oplus \mathbb{Z}_p p e_3] \\ [\mathbb{Z}_p e_1 \oplus p\mathbb{Z}_p e_2 \oplus \mathbb{Z}_p p e_3] \end{array} \right\} \begin{array}{l} (0, 0, 0) \\ (0, 0, 1) \\ (0, 1, 1) \end{array}$$

$$S = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{S_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{S_2}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ p^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{S_0} \right\}$$



